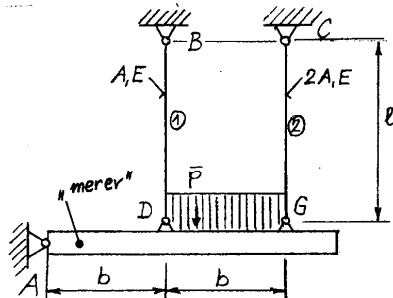


1. **Feladat:** Az A-D-G merev gerendát a D-G szakaszon állandó intenzitású megoszló erőrendszer terheli. Az A csukló és a két rugalmas rúd tartja egyensúlyban.



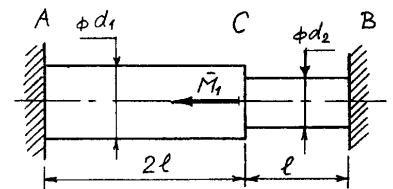
Adatok: $b = 0,8\text{m}$ $l = 1,2\text{m}$ $A = 80\text{mm}^2$

$E = 200\text{GPa}$ $p = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Kérdések:

- Számítsa ki a kényszererőket!
- Számítsa ki a rudak keresztmetszetén a feszültségeket!
- Határozza meg a rudak hosszváltozását!

2. **Feladat:** A mindkét végén befogott lépcsős tengelyt az M_1 nyomatékú erőpár terheli.



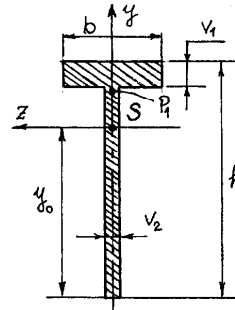
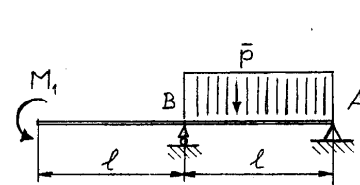
Adatok: $d_1 = 60\text{mm}$ $d_2 = 40\text{mm}$ $l = 1\text{m}$

$G = 80\text{GPa}$ $\tau_{\text{meg}} = 90\text{MPa}$

Kérdések:

- Mekkora lehet az M_1 nyomaték?
- Határozza meg az M_A és M_B kényszernyomatékokat!
- Számítsa ki a tengely A-C szakaszának $\Delta\varphi_{AC}$ szögelfordulását!

3. **Feladat:** A feladat a vázolt kéttámaszú tartó szilárdsági ellenőrzése!



Adatok: $p = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $M_1 = 1\text{kNm}$

$l = 0,8\text{m}$ $h = 120\text{mm}$ $b = 50\text{mm}$

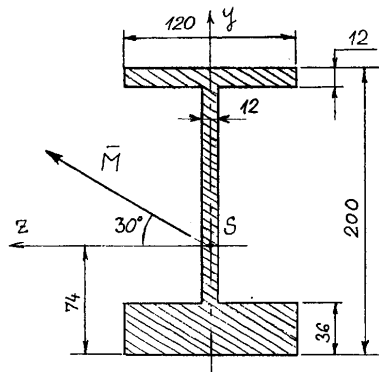
$v_1 = 12\text{mm}$ $v_2 = 6\text{mm}$

Kérdések:

- Állapítsa meg a σ_{max} feszültség helyét és nagyságát!
- Állapítsa meg a τ_{max} feszültség helyét és nagyságát!
- Számítsa ki a B támasz fölötti

keresztmetszet P_1 pontjában a $\sigma_{(P_1)}$ és $\tau_{(P_1)}$ feszültségeket!

4. **Feladat:** Az ábrán egy rúd ferde hajlításra igénybevett keresztmetszete látható! A méretek mm-ben adottak!



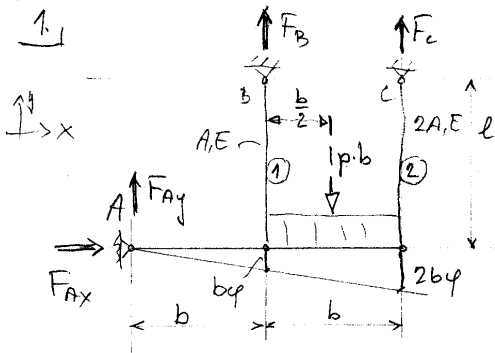
Adatok: $\sigma_{\text{meg}} = 180\text{MPa}$, $J_z = 40,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$J_y = 6,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

Kérdések:

- Határozza meg a semleges szál helyzetét!
- Mekkora lehet a nyomaték maximális értéke?
($|M_{\text{max}}| = ?$)

Megoldások



$$\sum X_i = 0 \rightarrow F_{Ax} = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow F_{Ay} + F_B + F_C - p \cdot b = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{i(A)} = 0 \rightarrow F_B \cdot b + F_C \cdot 2b - p \cdot b \cdot \frac{3}{2}b = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= b \cdot \varphi = \frac{F_B l}{AE} \\ \Delta l_2 &= 2b \varphi = \frac{F_C l}{2AE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2F_B l}{AE} = \frac{F_C l}{2AE} \Rightarrow 4F_B = F_C \quad (3)$$

(3) \rightarrow (2)-be helyettesítve:

$$F_B + 2 \cdot 4F_B = \frac{3}{2} p \cdot b \Rightarrow F_B = \frac{3}{10} p \cdot b$$

$$\underline{F_B = \frac{p \cdot b}{6} = \frac{10 \cdot 0,8}{6} = \frac{4}{3} = 1,333 \text{ kN}}$$

$$(3) \rightarrow \underline{F_C = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3} = 5,333 \text{ kN}} \quad (= \frac{2}{3} p b)$$

$$(1) \rightarrow \underline{F_{Ay} = p b - F_B - F_C = 8 - \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3} = 1,333 \text{ kN}} \quad (= \frac{p b}{6})$$

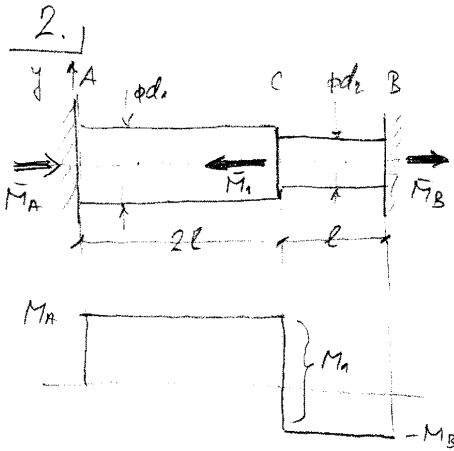
$$\sigma_{(1)} = \frac{N_{(1)}}{A_{(1)}} = \frac{F_B}{A} = \frac{1333,3}{80} = 16,67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_{(2)}}{A_{(2)}} = \frac{F_C}{2A} = \frac{4F_B}{2A} = 2 \cdot \sigma_{(1)} = 33,33 \text{ MPa}$$

$$\Delta l_{(1)} = \frac{N_{(1)} \cdot l}{A_{(1)} E} = \frac{1333,3 \cdot 1200}{80 \cdot 200 \cdot 10^3} = 0,099 \approx 0,1 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{(2)} = \frac{N_{(2)} \cdot l}{A_{(2)} E} = \frac{5333,3 \cdot 1200}{2 \cdot 80 \cdot 200 \cdot 10^3} = 0,2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{(2)} = 2 \Delta l_{(1)} \quad \checkmark$$



$$(1) \quad M_A + M_B = M_1 \quad (\sum M_i(x) = 0)$$

$$(2) \quad \varphi_{(A-B)} = \frac{M_A \cdot 2l}{J_{P1} G} - \frac{M_B \cdot l}{J_{P2} G} = 0$$

$$J_{P1} = \frac{d_1^4 \pi}{32} \quad J_{P2} = \frac{d_2^4 \pi}{32}$$

$$(2) \quad \frac{2M_A}{d_1^4} = \frac{M_B}{d_2^4} \Rightarrow M_B = 2M_A \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = 2M_A \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

$$\underline{M_B = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 M_A = 0,39506 M_A}$$

$$(1) \rightarrow M_A \cdot (1 + 0,39506) = M_1 \Rightarrow \underline{M_A = \frac{M_1}{1,3951} = 0,7168 M_1}$$

$$\underline{M_B = M_1 - M_A = 0,2832 M_1}$$

$$\tau_{\max(1)} = \frac{M_A}{K_{P1}} = \frac{0,7168 M_1 \cdot 16}{d_1^3 \pi} \leq \tau_{\text{meg}}$$

$$M_{1(1)} = \frac{d_1^3 \pi \cdot \tau_{\text{meg}}}{16 \cdot 0,7168} = \frac{60^3 \cdot \pi \cdot 90}{16 \cdot 0,7168} = 5,325 \text{ kNm}$$

$$\tau_{\max(2)} = \frac{M_B}{K_{P2}} = \frac{0,2832 M_1 \cdot 16}{d_2^3 \pi} \leq \tau_{\text{meg}}$$

$$M_{1(2)} = \frac{d_2^3 \pi \cdot \tau_{\text{meg}}}{16 \cdot 0,2832} = \frac{40^3 \cdot \pi \cdot 90}{16 \cdot 0,2832} = 3,99 \approx 4 \text{ kNm}$$

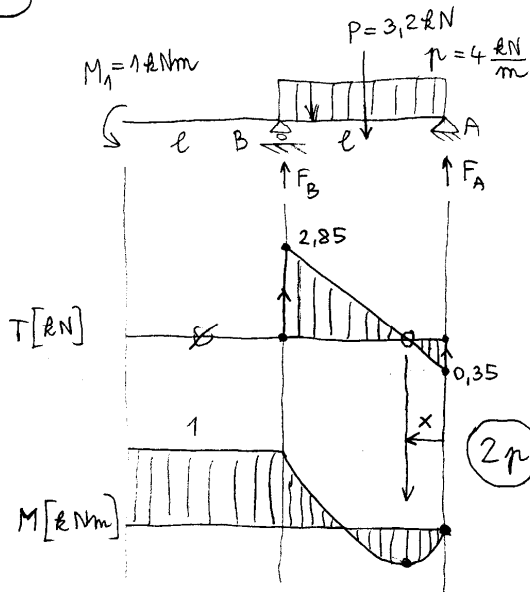
A megengedett értékek a kettő közül a

kisebbség, tehát $\underline{M_1 = 4 \text{ kNm}}$, ezzel: $\begin{cases} M_A = 2,867 \text{ kNm} \\ M_B = 1,133 \text{ kNm} \end{cases}$

$$\Delta\varphi_{AC} = \frac{M_A \cdot 2l}{J_{P1} G} = \frac{M_A \cdot 2l \cdot 32}{d_1^4 \pi \cdot G} = \frac{64 M_A \cdot l}{d_1^4 \pi G} = \frac{64 \cdot 2,867 \cdot 10^3 \cdot 1000}{60^4 \cdot \pi \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,0563 \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi_{AC} = 0,1127 \text{ rad} = 6,45^\circ$$

3



$$\sum M_A = 0 = M_1 - F_B l + P \frac{l}{2}$$

$$F_B = \frac{M_1}{l} + \frac{P}{2} = \frac{1}{0.8} + \frac{3.2}{2} = 2.85 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F_B - P + F_A$$

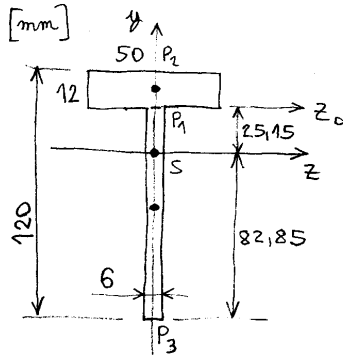
$$F_A = P - F_B = 3.2 - 2.85 = 0.35 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$T(x) = 0.35 - px = 0$$

$$x = \frac{0.35}{4} = 0.0875 \text{ m}$$

$$M(x) = F_A x - px \frac{x}{2} = 0.35 \cdot 0.0875 - 4 \cdot \frac{0.0875^2}{2}$$

$$M(x) = 0.01531 \text{ kNm}$$



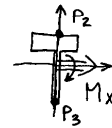
$$y_s = \frac{(+6) \cdot 50 \cdot 12 + (-54) \cdot 6 \cdot 108}{50 \cdot 12 + 6 \cdot 108} = \frac{-31392}{1248} = -25.15 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{12^3 \cdot 50}{3} + \frac{108^3 \cdot 6}{3} - 25.15^2 \cdot 1248 = 1.759 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

a.) $M_{\max} = 1 \text{ kNm} \rightarrow M_z = +1 \text{ kNm}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{P_2} = \frac{10^6}{1.759 \cdot 10^6} \cdot 37.15 = 21.12 \text{ MPa}$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{-M_z}{I_z} y_{P_3} = \frac{-10^6}{1.759 \cdot 10^6} \cdot (-82.85) = 47.10 \text{ MPa}$$

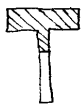


a konzolon

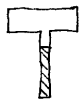
P_2 -ben

P_3 -ben

b.) $T_{\max} = 2.85 \text{ kN}$ a B támasznál az S súlypontban.



$$S_z = 31.15 \cdot 50 \cdot 12 + 12.575 \cdot 6 \cdot 25.15 = 2.06 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$



$$S_z = 41.425 \cdot 6 \cdot 82.85 = 2.06 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$v = 6 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{I_z} \frac{S_z}{r} = \frac{2850}{1,759 \cdot 10^6} \frac{2,06 \cdot 10^4}{6} = 5,563 \text{ MPa}$$

(2p)

c.)

$$\sigma_{P_1} = \frac{M_z}{I_z} y_{P_1} = \frac{10^6}{1,759 \cdot 10^6} (25,15) = +14,29 \text{ MPa}$$

(2p)

$$S_z^{(P_1)} = 31,15 \cdot 50 \cdot 12 = 18690 \text{ mm}^3$$

(1p)

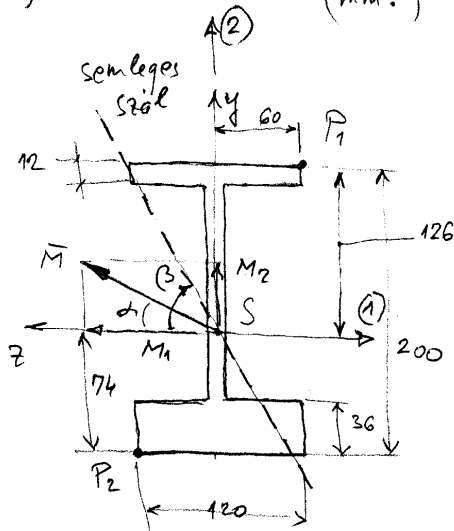
$$r = 6 \text{ mm}$$

(1p)

$$\tau_{P_1} = \frac{T_{max}}{I_z} \frac{S_z^{(P_1)}}{r} = \frac{2850}{1,759 \cdot 10^6} \frac{18690}{6} = 5,047 \text{ MPa}$$

(2p)

4.) (mm⁴)



$$J_z = 40,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = J_1$$

$$J_y = 6,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = J_2$$

$$a) \quad \tan \beta = \frac{J_1}{J_2} \tan \alpha = \frac{40,9}{6,9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3,422$$

$$\beta = \arctan 3,422 = 73,71^\circ$$

b) A keresztmetszetnek a semleges szálról legtávolabbi fekvő pontja P₁. Itt lesz a legnagyobb a

P₁ (s₁ = 60 mm, s₂ = 126 mm) feszültség.

$$\sigma(P_1) = \frac{M_1}{J_1} s_2 - \frac{M_2}{J_2} s_1 = -\frac{M \frac{\sqrt{3}}{2}}{J_1} s_2 - \frac{M \cdot \frac{1}{2}}{J_2} s_1$$

$$\sigma_{\max} = |\sigma(P_1)| \leq \sigma_{\text{meg}}$$

$$M_{\max} \left(\frac{\sqrt{3} s_2}{2 J_1} + \frac{s_1}{2 J_2} \right) \leq \sigma_{\text{meg}} \cdot 2$$

$$M_{\max} \leq \frac{2 \sigma_{\text{meg}}}{\frac{\sqrt{3} s_2}{J_1} + \frac{s_1}{J_2}} = \frac{2 \cdot 180 \cdot 10^6}{\frac{\sqrt{3} \cdot 126}{40,9 \cdot 10^6} + \frac{60}{6,9 \cdot 10^6}} = 25,656 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{\max} = 25,6 \text{ kNm}$$

Ellenőrzés: A feszültség a P₂ pontban:

$$P_2 (s_1 = -60 \text{ mm}, s_2 = -74 \text{ mm})$$

$$\sigma(P_2) = -\frac{25,6 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^6}{2 \cdot 40,9 \cdot 10^6} \cdot (-74) - \frac{25,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,9 \cdot 10^6} \cdot (-60) = 40,11 + 111,3$$

$$\sigma(P_2) = 151,42 \text{ MP}, \text{ húzófeszültség, } < \sigma_{\text{meg}}$$

P₁-ben:

$$\sigma(P_1) = -\frac{25,6 \sqrt{3} \cdot 10^6}{2 \cdot 40,9 \cdot 10^6} \cdot 126 - \frac{25,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,9 \cdot 10^6} \cdot 60 = -68,3 - 111,3 = -179,6 \text{ MP}$$

nyomófeszültség

$$|\sigma(P_1)| < \sigma_{\text{meg}}$$