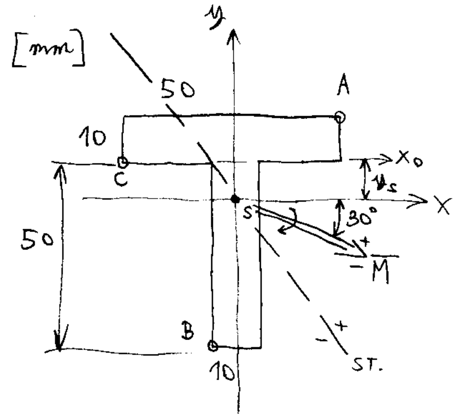
1. példa: Az előadási gyakorlat 3. feladata.

Adott egy rúd keresztmetszete, valamint a keresztmetszetben ható hajlítónyomaték nagysága és iránya. Adjuk meg a keresztmetszetben ébredő legnagyobb normálfeszültség helyét és nagyságát! Számítsuk ki a semleges tengely szöghelyzetét! Ábrázoljuk is!



$M = 1{,}2\ kNm$

$|\sigma|_{max} = ?\qquad \beta = ?$

$M_x = M\cos\alpha = {}^{+}1200\cdot\cos 30^\circ = 1039\ Nm$

$M_y = M\sin\alpha = {}^{-}1200\cdot\sin 30^\circ = {}^{-}600\ Nm$

$$y_s = \frac{5\cdot 50\cdot 10 + (-25)\cdot 10\cdot 50}{50\cdot 10 + 10\cdot 50} = \frac{-10\,000}{1000} = {}^{-}10\ mm$$

$$I_x = \frac{10^3\,50}{3} + \frac{50^3\cdot 10}{3} - 10^2\cdot 1000 = 333\,333\ mm^4$$

$$I_y = \frac{50^3\cdot 10}{12} + \frac{10^3\cdot 50}{12} = 108\,333\ mm^4$$

$$tg\,\beta = \frac{I_x}{I_y}\,\frac{M_y}{M_x} = \frac{I_x}{I_y}\,\frac{M_y}{M_x} = \frac{333\,333}{108\,333}\,\frac{{}^{-}600}{1039} = {}^{-}1{,}777 \rightarrow \boxed{\beta = {}^{-}60{,}63^\circ}$$

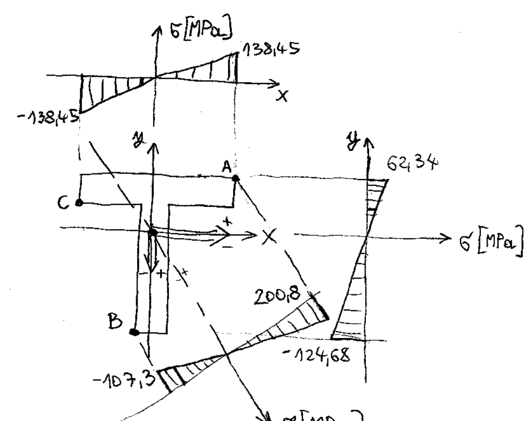
$A(25;20)\quad B(-5;-40)\quad C(-25;10)\quad [mm]$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x}y_A - \frac{M_y}{I_y}x_A = \frac{1039\cdot 10^3}{333\,333}\cdot 20 - \frac{(-600\cdot 10^3)}{108\,333}\cdot 25 = 3{,}117\cdot 20 + 5{,}538\cdot 25 = {}^{+}200{,}8\ MPa$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x}y_B - \frac{M_y}{I_y}x_B = 3{,}117\cdot(-40) + 5{,}538(-5) = {}^{-}152{,}4\ MPa$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{I_x}y_C - \frac{M_y}{I_y}x_C = 3{,}117\cdot(10) + 5{,}538(-25) = {}^{-}107{,}3\ MPa$$

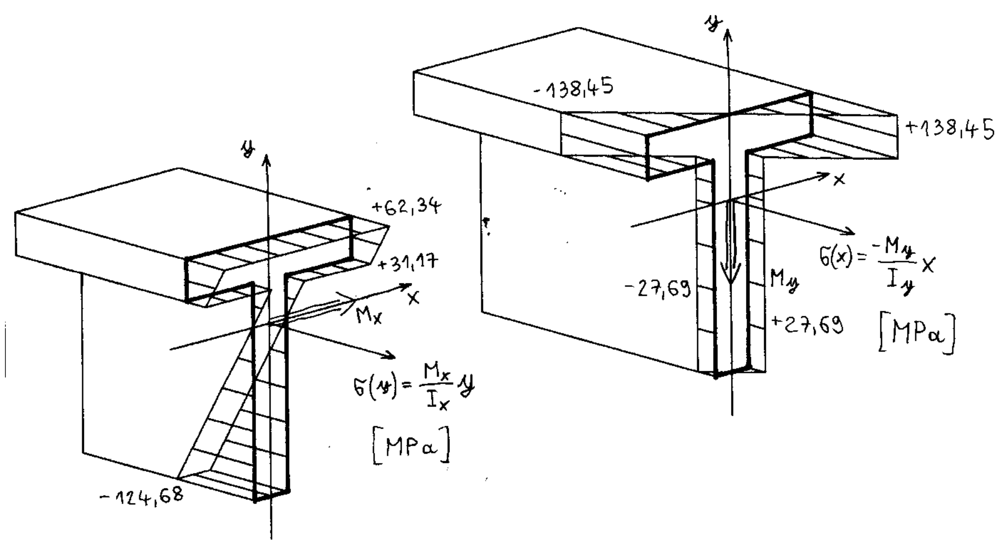
$$\boxed{|\sigma|_{max} = \sigma_A = 200{,}8\ MPa}$$



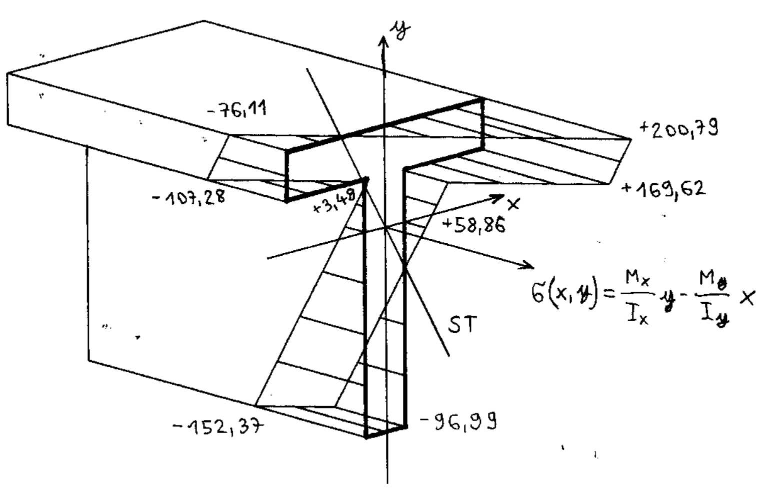
A feszültségeloszlás térbeli szemléltetése:

X [mm]	Y [mm]	$\sigma(y)$ $[MPa]$	$\sigma(x)$ $[MPa]$	$\sigma(x,y)$ $[MPa]$
-25	+20	+62,34	-138,45	-76,11
+25	+20	+62,34	+138,45	+200,79
+25	+10	+31,17	+138,45	+169,62
+5	+10	+31,17	+27,69	+58,86
+5	-40	-124,68	+27,69	-96,99
-5	-40	-124,68	-27,69	-152,37
-5	+10	+31,17	-27,69	+3,48
-25	+10	+31,17	-138,45	-107,28

A két hajlítókomponens által okozott feszültségeloszlás:



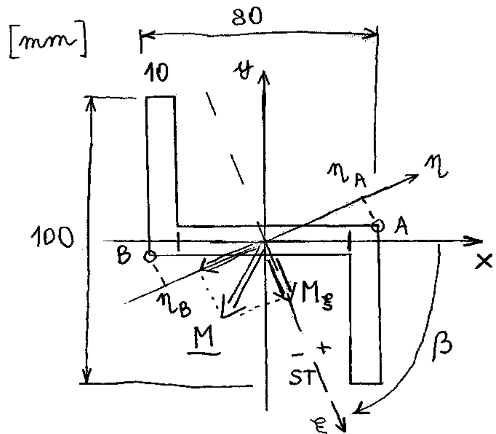
Az eredő feszültségeloszlás:



Ez továbbra is egy ferde sík, de most már nem megy át egyik koordinátatengelyen sem. Az x-y síkot az origón átmenő ST semleges tengely vonala mentén metszi.

2. példa: A 4. gyakorlat 2. feladata.

Számítsuk ki a keresztmetszetben ébredő legnagyobb feszültséget! Adjuk meg a semleges tengely szöghelyzetét!



$$M_x = -1 \text{ kNm}$$
$$M_y = -2{,}2 \text{ kNm}$$

$$I_x = \frac{10^3 \cdot 60}{12} + 2\left[\frac{55^3 \cdot 10}{12} + 22{,}5^2 \cdot 55 \cdot 10\right] = 8{,}392 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

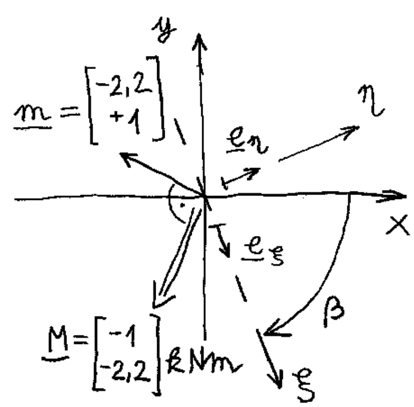
$$I_y = \frac{60^3 \cdot 10}{12} + 2\left[\frac{10^3 \cdot 55}{12} + 35^2 \cdot 55 \cdot 10\right] = 1{,}537 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 + 2\left[0 + (+22{,}5)(-35) \cdot 55 \cdot 10\right] = -8{,}663 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}392 & 8{,}663 \\ 8{,}663 & 15{,}37 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2{,}2 \end{bmatrix} \text{kNm} \longrightarrow \underline{m} \perp \underline{M} \longrightarrow \underline{m} = \begin{bmatrix} -2{,}2 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{m}^T \underline{\underline{I}}_{xy} \underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} -2{,}2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8{,}392 & 8{,}663 \\ 8{,}663 & 15{,}37 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{bmatrix} -9{,}799 & -3{,}689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = -9{,}799 \cos\beta - 3{,}689 \sin\beta = 0$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-9{,}799}{3{,}689} = -2{,}656 \longrightarrow \boxed{\beta = -69{,}37^\circ}$$

$$\underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos -69{,}37^\circ \\ \sin -69{,}37^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3523 \\ -0{,}9359 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_\eta = \begin{bmatrix} 0{,}9359 \\ 0{,}3523 \end{bmatrix}$$

$$M_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{M} = \begin{bmatrix} 0{,}3523 & -0{,}9359 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1000 \\ -2200 \end{bmatrix} = +1707 \ \text{Nm}$$

$$I_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} 0{,}3523 & -0{,}9359 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8{,}392 & 8{,}663 \\ 8{,}663 & 15{,}37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3523 \\ -0{,}9359 \end{bmatrix} \cdot 10^5 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}3523 & -0{,}9359 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5{,}151 \\ -11{,}33 \end{bmatrix} = 8{,}789 \cdot 10^5 \ \text{mm}^4$$

$$\eta_A = \underline{e}_\eta^T \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0{,}9359 & 0{,}3523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +40 \\ +5 \end{bmatrix} = +39{,}20 \ \text{mm}$$

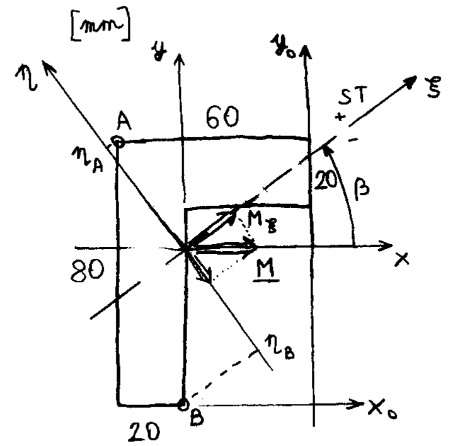
$$\sigma_A = \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta_A = \frac{+1707 \cdot 10^3}{8{,}789 \cdot 10^5} (+39{,}2) = +76{,}13 \ \text{MPa}$$

$$\eta_B = -\eta_A \longrightarrow \sigma_B = -\sigma_A$$

$$\boxed{|\sigma|_{max} = 76{,}13 \ \text{MPa}}$$

3. példa: A 4. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

Számítsuk ki a keresztmetszetben ébredő legnagyobb feszültséget! Adjuk meg a semleges tengely szöghelyzetét!



$M_x = +1\ kNm$

$|\sigma|_{max} = ?$

$\beta = ?$

$$x_S = \frac{(-30)\cdot 60\cdot 80 - (-20)\cdot 40\cdot 60}{60\cdot 80 - 40\cdot 60} = \frac{-96\,000}{2400} = -40\ mm$$

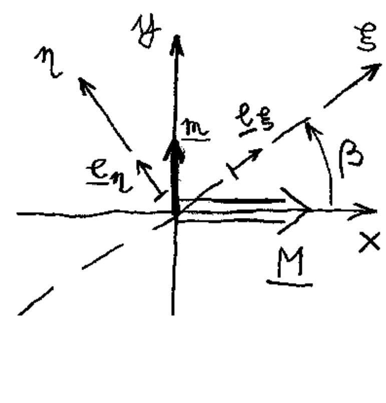
$$y_S = \frac{(+40)\cdot 60\cdot 80 - (+30)\cdot 40\cdot 60}{2400} = \frac{+120\,000}{2400} = +50\ mm$$

$$I_x = \frac{80^3\cdot 60}{3} - \frac{60^3\cdot 40}{3} - 50^2\cdot 2400 = 1{,}360\cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_y = \frac{20^3\cdot 80}{3} + \frac{40^3\cdot 20}{3} = 6{,}400\cdot 10^5\ mm^4$$

$$I_{xy} = \left[0 + (+10)(+10)\cdot 20\cdot 80\right] + \left[0 + (-20)(-20)\cdot 40\cdot 20\right] = +4{,}800\cdot 10^5\ mm^4$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} kNm \longrightarrow \underline{m} \perp \underline{M} \longrightarrow \underline{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{m}\,\underline{\underline{I}}_{xy}\,\underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13{,}6 & -4{,}8 \\ -4{,}8 & 6{,}4 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4{,}8 & 6{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = -4{,}8\cos\beta + 6{,}4\sin\beta = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{4{,}8}{6{,}4} = +0{,}75 \longrightarrow \boxed{\beta = +36{,}87^\circ}$$

$$\underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos +36{,}87^\circ \\ \sin +36{,}87^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_\eta = \begin{bmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$I_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_\xi = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,6 & -4,8 \\ -4,8 & 6,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{bmatrix} \cdot 10^5 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^5 = 6,4 \cdot 10^5 \, mm^4$$

$$M_\xi = \underline{e}_\xi^T \underline{M} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix} = +800 \, Nm$$

$$\eta_A = \underline{e}_\eta^T \underline{r}_A = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ +30 \end{bmatrix} = +36 \, mm$$

$$\sigma_A = \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta_A = \frac{+800 \cdot 10^3}{6,4 \cdot 10^5} (+36) = +45 \, MPa$$

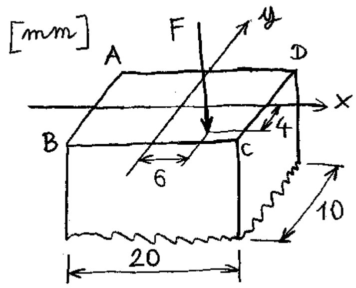
$$\eta_B = \underline{e}_\eta^T \underline{r}_B = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} = -40 \, mm$$

$$\sigma_B = \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta_B = \frac{+800 \cdot 10^3}{6,4 \cdot 10^5} (-40) = -50 \, MPa$$

$$|\sigma|_{max} = |\sigma_B| = 50 \, MPa$$

4. példa: A csütörtöki (2015.03.05.) konzultáció 1. feladata. Kétszeresen külpontos nyomás.

A hasábot az ábrán látható, külpontosan elhelyezkedő erő terheli. Számítsuk ki a feszültséget a sarokpontokban! Írjuk fel a semleges tengely egyenletét, számítsuk ki a tengelymetszeteket és az x tengellyel bezárt szöget! Ábrázoljuk a feszültségeloszlást!



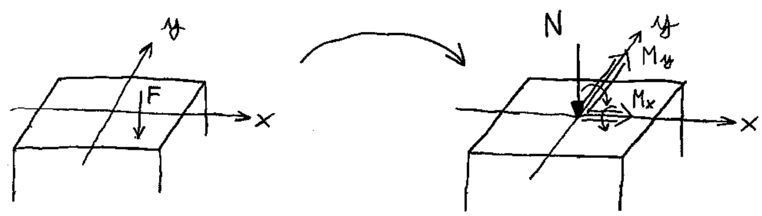
$F = 5\ kN$

$\sigma_{A \dots D} = ?$

ST egyenlete ?

ST tengelymetszetek ?

ST szöge ?



$$N = -F = -5000\ N$$

$$M_x = +F \cdot 4 = +5000 \cdot 4 = +20\,000\ Nmm$$

$$M_y = +F \cdot 6 = +5000 \cdot 6 = +30\,000\ Nmm$$

$$A = 20 \cdot 10 = 200\ mm^2$$

$$I_x = \frac{10^3 \cdot 20}{12} = 1667\ mm^4$$

$$I_y = \frac{20^3 \cdot 10}{12} = 6667\ mm^4$$

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma(x,y) = \frac{-5000}{200} + \frac{+20000}{1667} y - \frac{+30000}{6667} x = -25 + 12{,}00\, y - 4{,}500\, x$$

$$\sigma_A = -25 + 12\,(+5) - 4{,}5\,(-10) = -25 + 60 + 45 = +80\ MPa$$

$$\sigma_B = -25 + 12\,(-5) - 4{,}5\,(-10) = -25 - 60 + 45 = -40\ MPa$$

$$\sigma_C = -25 + 12\,(-5) - 4{,}5\,(+10) = -25 - 60 - 45 = -130\ MPa$$

$$\sigma_D = -25 + 12\,(+5) - 4{,}5\,(+10) = -25 + 60 - 45 = -10\ MPa$$

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \rightarrow y = ax + b$$

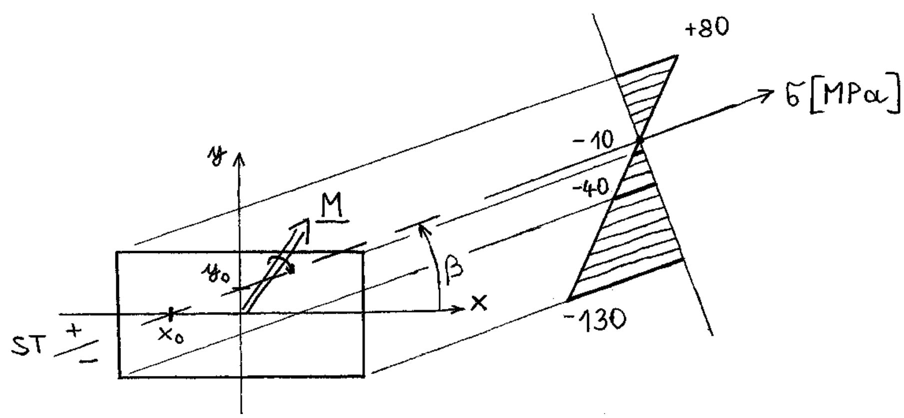
$$\boxed{y = \frac{I_x}{M_x}\left(\frac{M_y}{I_y}x - \frac{N}{A}\right) = \frac{1667}{+20\,000}\left(\frac{+30\,000}{6667}x - \frac{-5000}{200}\right) = 0{,}3751\,x + 2{,}084}$$

$$y = 0{,}3751\,x + 2{,}084 = 0 \rightarrow \boxed{x_0 = \frac{-2{,}084}{0{,}3751} = -5{,}556\ mm}$$

$$x = 0 \rightarrow \boxed{y_0 = y(0) = 2{,}084\,mm}$$

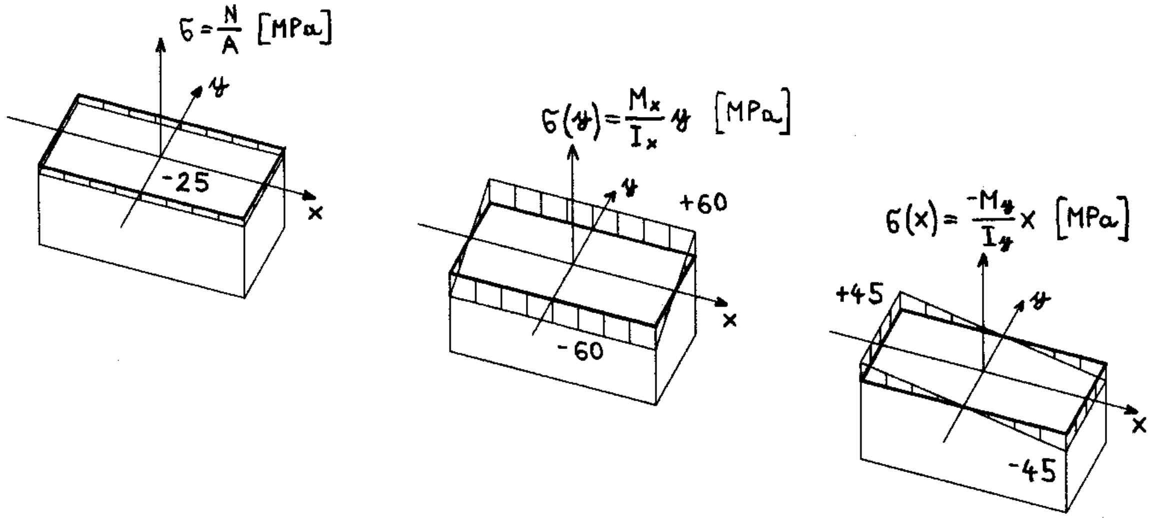
$$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = const.$$

$$tg\,\beta = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y}\frac{M_y}{M_x} = \frac{1667}{6667}\,\frac{30}{20} = {}^{+}0{,}3751 \rightarrow \boxed{\beta = {}^{+}20{,}56^\circ}$$

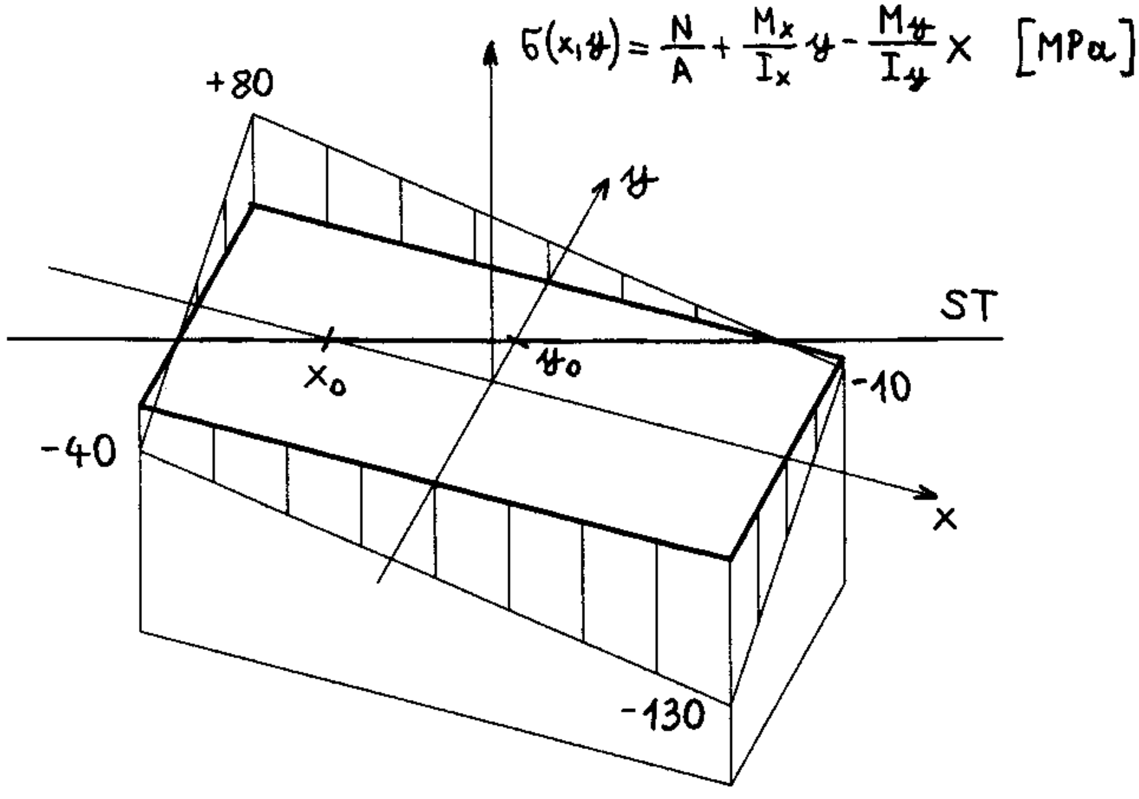


A feszültségeloszlás térbeli szemléltetése:

A normálerő és a két hajlítókomponens által okozott feszültségeloszlások:



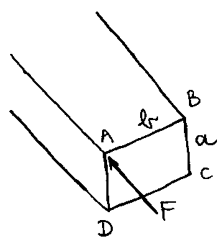
Az eredő feszültségeloszlás:



A normálerőből adódó egyenletes feszültségeloszlás összetevő miatt az ST semleges tengely most már nem megy át az origón.

5. példa: A csütörtöki (2015.03.05.) konzultáció 1. példájához hasonló feladat.

A hasábot az ábrán látható, az A csúcsban működő erő terheli. Számítsuk ki a feszültséget a sarokpontokban! Írjuk fel a semleges tengely egyenletét, számítsuk ki a tengelymetszeteket és az x tengellyel bezárt szöget! Ábrázoljuk a feszültségeloszlást!



$F = 5\ kN$

$a = 1\ cm$

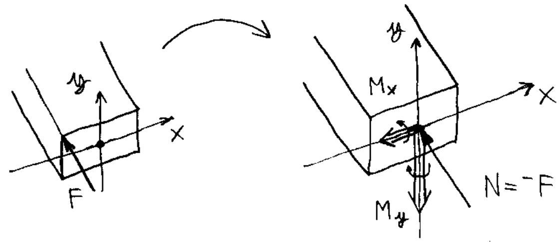
$b = 2\ cm$

$\sigma_{A...D} = ?$

ST egyenlete?

ST tengelymetszetek?

ST szöge?



$N = -F = -5000\ N$

$M_x = -F \cdot 5 = -5000 \cdot 5 = -25 \cdot 10^3\ Nmm$

$M_y = -F \cdot 10 = -5000 \cdot 10 = -50 \cdot 10^3\ Nmm$

$I_x = \dfrac{10^3 \cdot 20}{12} = 1667\ mm^4$

$I_y = \dfrac{20^3 \cdot 10}{12} = 6667\ mm^4$

$A = 20 \cdot 10 = 200\ mm^2$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-5000}{200} + \frac{-25 \cdot 10^3}{1667} y - \frac{-50 \cdot 10^3}{6667} x =$$

$$= -25 - 15{,}00\, y + 7{,}500\, x$$

$$\boxed{\sigma_A} = -25 - 15(+5) + 7{,}5(-10) = -25 - 75 - 75 = \boxed{-175\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_B} = -25 - 15(+5) + 7{,}5(+10) = -25 - 75 + 75 = \boxed{-25\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_C} = -25 - 15(-5) + 7{,}5(+10) = -25 + 75 + 75 = \boxed{+125\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_D} = -25 - 15(-5) + 7{,}5(-10) = -25 + 75 - 75 = \boxed{-25\ MPa}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \longrightarrow y = a x + b$$

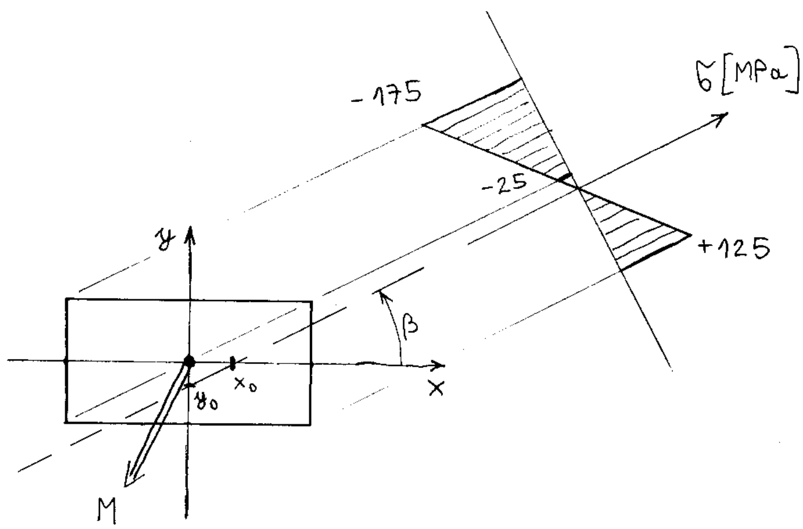
$$\boxed{y = \frac{I_x}{M_x}\left(\frac{M_y}{I_y} - \frac{N}{A}\right) = \frac{1667}{-25\cdot 10^3}\left(\frac{-50\cdot 10^3}{6667} - \frac{-5000}{200}\right) = 0,5001\,x - 1,667}$$

$$y = 0,5001\,x_0 - 1,667 = 0 \longrightarrow \boxed{x_0 = \frac{1,667}{0,5001} = +3,333\ mm}$$

$$x = 0 \longrightarrow \boxed{y_0 = y(0) = -1,667\ mm}$$

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = const.$$

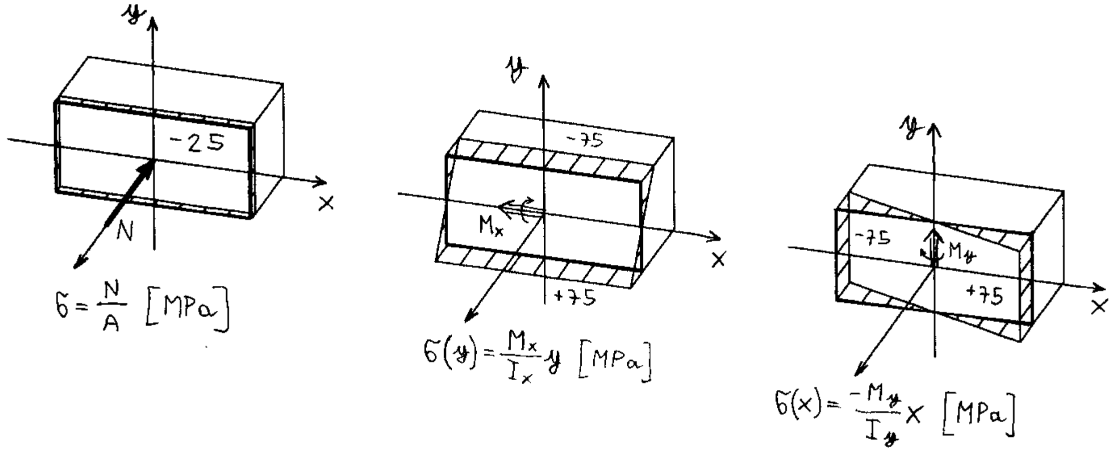
$$tg\,\beta = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y}\,\frac{M_y}{M_x} = \frac{1667}{6667}\cdot\frac{-50\cdot 10^3}{-25\cdot 10^3} = +0,5001 \longrightarrow \boxed{\beta = +26,57^\circ}$$



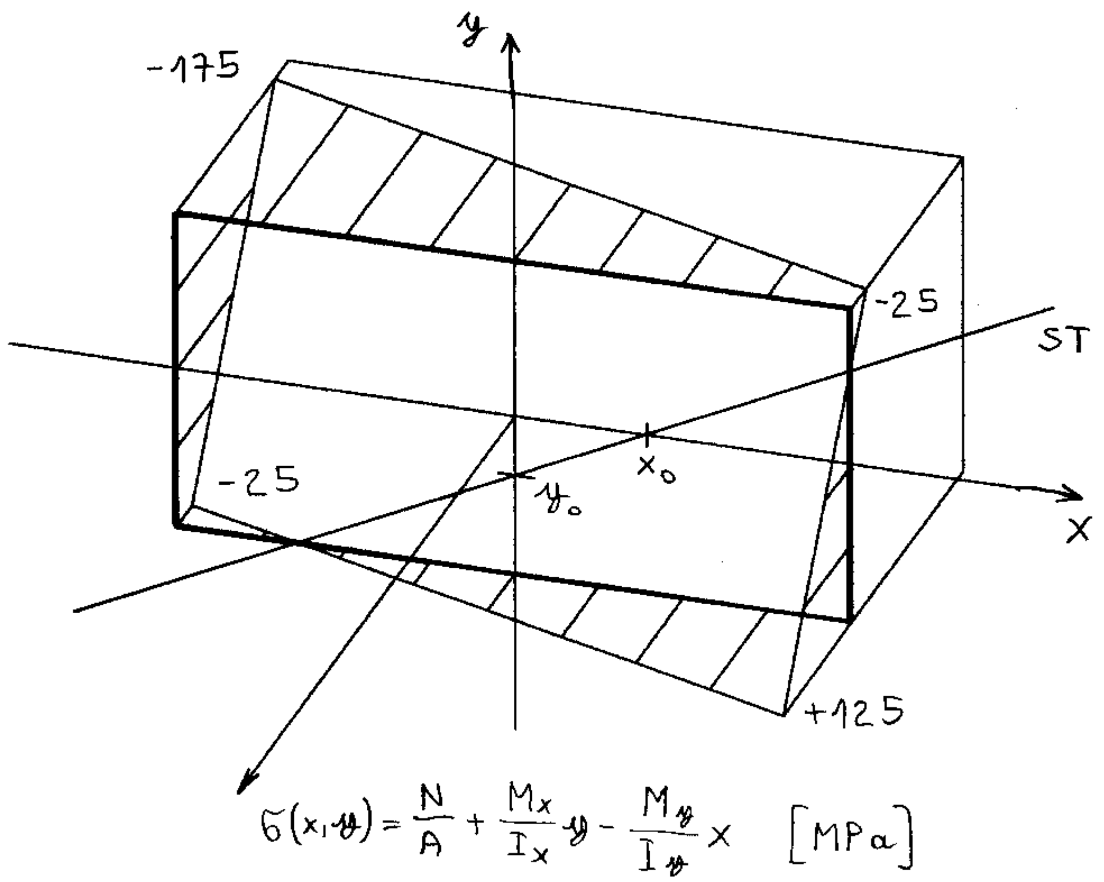
Megjegyzés:
A semleges tengely most pont a téglalap átlójával párhuzamos. Ilyen helyzet akkor áll fenn, ha a külpontos erő a téglalap másik átlóján helyezkedik el. Mivel most éppen a csúcspontban van, teljesül az előbbi feltétel. Fontos, hogy ez egy speciális helyzet, az általános esetet az előző feladat szemlélteti.

A feszültségeloszlás térbeli szemléltetése:

A normálerő és a két hajlítókomponens által okozott feszültségeloszlások:



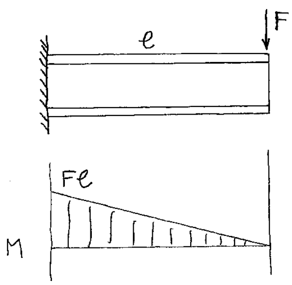
Az eredő feszültségeloszlás:

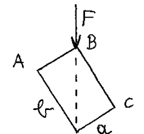


A normálerőből adódó egyenletes feszülségeloszlás összetevő miatt az ST semleges tengely most már nem megy át az origón.

6. példa: A 4. gyakorlat 3. feladata. Az ittas melósok ferdén építették be a gerendát.

A beépítés olyan, hogy a B és a D pont függőlegesen pont egymás alatt van. Mekkora a feszültség a kritikus keresztmetszet A, B, C és D pontjában?





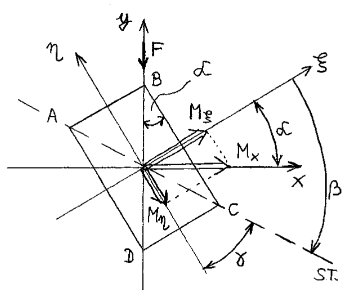
$a = 12\ cm$

$b = 16\ cm$

$\ell = 1{,}5\ m$

$F = 16\ kN$

$\sigma_{A \ldots D} = ?$



$M_x = F\ell = 16 \cdot 1{,}5 = 24\ kNm$

$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{12}{16} = 0{,}75 \rightarrow \alpha = 36{,}87^0$

$M_\xi = M_x \cos\alpha = 24 \cdot \cos 36{,}87^0 = 19{,}20\ kNm$

$M_\eta = -M_x \sin\alpha = 24 \cdot \sin 36{,}87^0 = -14{,}40\ kNm$

$I_\xi = \frac{a b^3}{12} = \frac{12 \cdot 16^3}{12} = 4096\ cm^4$

$I_\eta = \frac{a^3 b}{12} = \frac{12^3 \cdot 16}{12} = 2304\ cm^4$

$$\sigma(\xi,\eta) = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi$$

$$\sigma_A = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta_A - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi_A = \frac{19{,}2 \cdot 10^6}{4096 \cdot 10^4}(+80) - \frac{-14{,}4 \cdot 10^6}{2304 \cdot 10^4}(-60) =$$

$$= 0{,}4688 \cdot 80 + 0{,}625 \cdot (-60) = \boxed{0}$$

$$\boxed{\sigma_B = \sigma(\xi_B, \eta_B) = 0{,}4688 \cdot 80 + 0{,}625 \cdot 60 = 75\ MPa}$$

$\sigma_C = -\sigma_A = 0$

$\sigma_D = -\sigma_B = -75\ MPa$

Ellenőrzés: semleges tengely

$$\sigma(\xi,\eta) = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi = 0$$

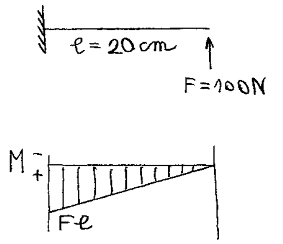
$$tg\,\beta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{I_\xi}{I_\eta}\frac{M_\eta}{M_\xi} = \frac{4096}{2304}\,\frac{-14{,}4}{19{,}2} = -1{,}333 \longrightarrow \beta = -53{,}13^0$$

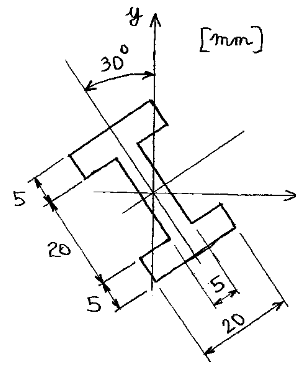
$$\gamma = 90^0 - |\beta| = 90 - 53{,}13 = 36{,}87^0 = \alpha$$

Megjegyzés:
Most a $\xi\eta$ a főirányok koordinátarendszere. Ebben könnyű számolni, mivel a másodrendű nyomatékok és a koordináták kiszámítása is ebben egyszerű. Csak a nyomatékvektort kellett áttranszformálni.
Mivel $\gamma = \alpha$, a semleges tengely tényleg átmegy az A és a B ponton, ezért ott valóban nulla a feszültség.

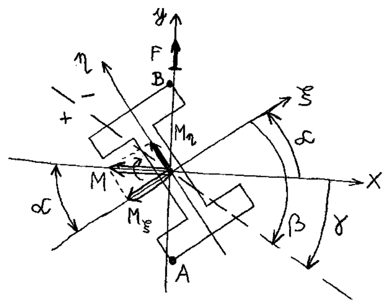
7. példa: A 4. gyakorlat 3. példájához hasonló feladat. Még mindig nem józanodtak ki.

Határozzuk meg a ferdén beépített I gerendában ébredő legnagyobb feszültséget! Adjuk meg a semleges tengely helyzetét a kritikus keresztmetszetben a vízszintes tengelyhez képest!





$$|\sigma|_{max} = ?$$
$$\beta = ?$$



$$F\ell = 100 \cdot 0{,}2 = 20\,\mathrm{Nm}$$

$$M_\xi = -M \cdot \cos\alpha = -20 \cos 30^\circ = -17{,}32\,\mathrm{Nm}$$

$$M_\eta = M \sin\alpha = 20 \sin 30^\circ = 10\,\mathrm{Nm}$$

$$I_\xi = \frac{30^3 \cdot 20}{12} - \frac{20^3 \cdot 15}{12} = 35\,000\,\mathrm{mm}^4$$

$$I_\eta = \frac{5^3 \cdot 20}{12} + \frac{20^3 \cdot 10}{12} = 6875\,\mathrm{mm}^4$$

$$\sigma(\xi,\eta) = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi$$

$$\sigma(\xi,\eta) = 0 \rightarrow \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{I_\xi}{I_\eta}\frac{M_\eta}{M_\xi} = \frac{35000}{6875}\,\frac{10}{-17{,}32} = -2{,}939 \rightarrow \underline{\beta = -71{,}21^\circ}$$

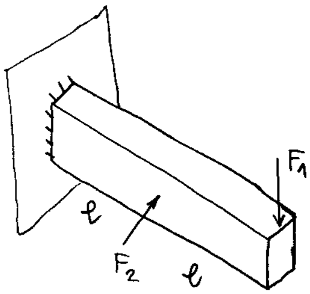
$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta = 30 - 71{,}21 = -41{,}21^\circ}$$

$$\boxed{|\sigma|_{max} = -\sigma_B = \sigma_A = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta_A - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi_A = \frac{-17{,}32 \cdot 10^3}{35000}(-15) - \frac{10^4}{6875}(-10) = 21{,}97\,\mathrm{MPa}}$$

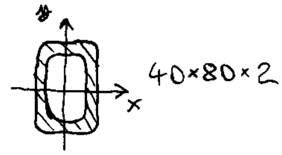
Megjegyzés:
Most a $\xi\eta$ a főirányok koordinátarendszere. Ebben könnyű számolni, mivel a másodrendű nyomatékok és a koordináták kiszámítása is ebben egyszerű. Csak a nyomatékvektort kellett áttranszformálni.
A kritikus keresztmetszet a befogásnál van, mivel ott a legnagyobb a hajlító igénybevétel. A semleges tengely helyzetét a főirányok koordinátarendszerében tudtuk kiszámolni, majd áttranszformáltuk az xy rendszerbe. A semleges tengely helyzete alapján rájöttünk, hogy az A pontban ébred a legnagyobb húzófeszültség. A B-ben pedig ugyanekkora van nyomás van.

8. példa: A 4. gyakorlaton csak áttekintett méretezési feladat.

Mekkora lehet az F_2 erő, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 140$ MPa ?



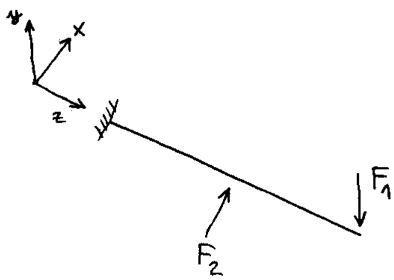
$F_1 = 1$ kN $\quad \ell = 0{,}5$ m

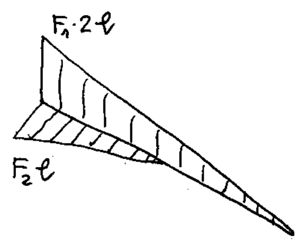


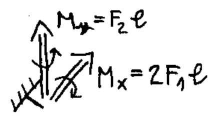
$I_x = 37{,}6\ \mathrm{cm}^4$

$I_y = 12{,}7\ \mathrm{cm}^4$

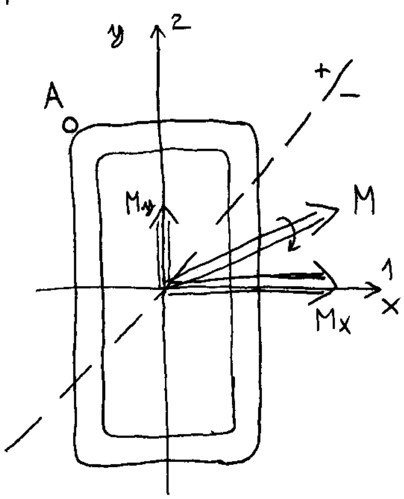
$\sigma_{meg} = 140$ MPa $\qquad F_2 = ?$







$M_x = 2F_1\ell = 2\cdot 1000\cdot 500 = 10^6$ Nmm



$$\sigma_{meg} \geq \sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A - \frac{M_y}{I_y} x_A$$

$$140 \geq \frac{10^6}{37{,}6\cdot 10^4}(+40) - \frac{M_y}{12{,}7\cdot 10^4}(-20)$$

$$M_y \leq \frac{12{,}7\cdot 10^4}{20}\left(140 - \frac{10^6}{37{,}6\cdot 10^4}\cdot 40\right)$$

$$M_y \leq 2{,}135\cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

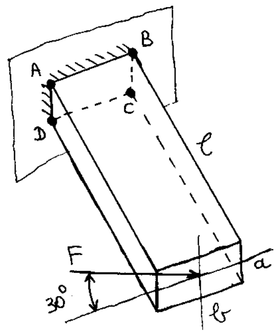
$$M_y \leq 213{,}5 \text{ Nm}$$

$$\boxed{F_2 \leq \frac{M_y}{\ell} = \frac{213{,}5}{0{,}5} = 427 \text{ N}}$$

Megjegyzés:
Az erők irányából megállapítható a befogásnál ébredő nyomaték komponenseinek iránya. Így meghatározható a semleges tengely helyzete, és a szélső szál helye (A pont). Erre kell felírni a feltételi egyenletet.

9. példa: További méretezési feladat.

Határozzuk meg a keresztmetszet méretét úgy, hogy a megengedett feszültséget sehol se lépjük túl! Számítsuk ki az A, B, C és D pontban ébredő feszültséget, és ábrázoljuk a feszültségeloszlást!



$F = 10\ kN$

$\ell = 1\ m$

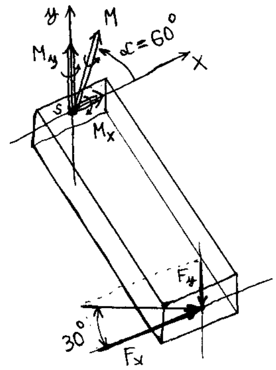
$\sigma_{meg} = 150\ MPa$

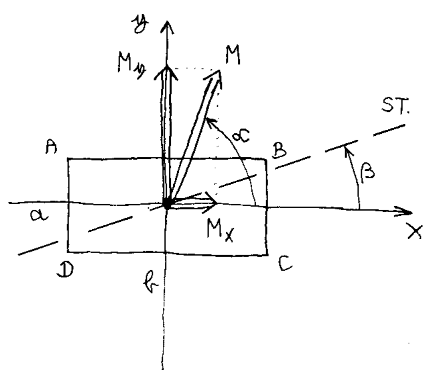
$b = 2a$

$a = ?$

$b = ?$

$\sigma_{A...D} = ?$





$$M = F\ell = 10 \cdot 1 = 10\ kNm$$

$$M_x = M\cos\alpha = 10\cos 60^\circ = 5\ kNm$$

$$M_y = M\sin\alpha = 10\sin 60^\circ = 8{,}660\ kNm$$

$$\left(\begin{array}{l} M_x = {}^{+}F_y\ell = F\sin 30^\circ \cdot \ell \\ M_y = {}^{+}F_x\ell = F\cos 30^\circ \cdot \ell \end{array}\right)$$

$$I_x = \frac{a^3 b}{12} = \frac{a^3(2a)}{12} = \frac{1}{6}a^4$$

$$I_y = \frac{b^3 a}{12} = \frac{(2a)^3 a}{12} = \frac{2}{3}a^4$$

$$\sigma_{meg} \geq \sigma_A = \frac{M_x}{I_x}y_A - \frac{M_y}{I_y}x_A = \frac{M_x}{\frac{1}{6}a^4}\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{M_y}{\frac{2}{3}a^4}\left(-a\right) = 3\frac{M_x}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{M_y}{a^3}$$

$$\boxed{a \geq \sqrt[3]{\frac{3}{\sigma_{meg}}\left(M_x + \frac{M_y}{2}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{3}{150}\left(5\cdot 10^6 + \frac{8{,}66\cdot 10^6}{2}\right)} = \boxed{57{,}14\ mm}$$

$$\boxed{b \geq 2a = 2\cdot 57{,}14 = 114{,}28\ mm}$$

Megjegyzés:
A nyomatékvektor ismeretében meghatározható a semleges tengely iránya. Az ettől legtávolabbi pontra felírva a feltételi egyenletet, a keresztmetszet méretei meghatározhatók.

A keresztmetszeti méretek ismeretében kiszámíthatók a feszültségek.

$$I_x = \frac{1}{6} \cdot 57{,}14^4 = 1{,}777 \cdot 10^6 \ mm^4$$

$$I_y = \frac{2}{3} \cdot 57{,}14^4 = 7{,}107 \cdot 10^6 \ mm^4$$

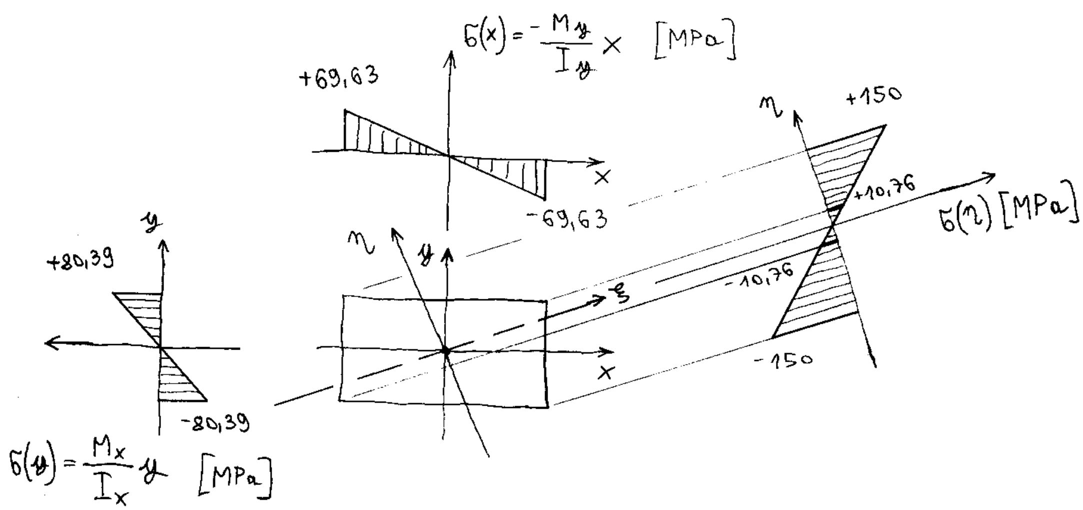
$$\boxed{\sigma_A = \sigma_{meg} = +150 \ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x} y_B - \frac{M_y}{I_y} x_B = \frac{+5 \cdot 10^6}{1{,}777 \cdot 10^6}\left(+\frac{57{,}14}{2}\right) - \frac{+8{,}66 \cdot 10^6}{7{,}107 \cdot 10^6}\left(+57{,}14\right) =$$

$$= 80{,}39 - 69{,}63 = \boxed{+10{,}76 \ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_C = -\sigma_A = -150 \ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_D = -\sigma_B = -10{,}76 \ MPa}$$



Megjegyzés:
Az A pontban éppen a megengedett feszültséggel azonos nagyságú húzófeszültség ébred, hiszen erre a pontra méreteztünk. A keresztmetszet szimmetriája miatt az átellenben lévő C pontban is ugyanekkora a feszültség, csak nyomás irányú.